9

2ième BAC - SM

ROYAUME DU MAROC

2018 R

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION DE RATTRAPAGE : JUILLET 2018

PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE

Le Premier Exercice

La Question : 1)

D'abord, E est évidemment une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisqu'il s'agit de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme $M(x,y)$ explicitée dans l'énoncé. E est non vide parce qu'on peut exhiber au moins un élément de cet ensemble et c'est $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta$

En fait, On peut exhiber dans ce cas simple beaucoup d'éléments puisque la condition sur x et y est large et abondante. Il suffit que x et y soient dans $\mathbb{R}$.

Par suite, On utilise la caractérisation des sous groupes. On se donne deux éléments $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E, et On souhaite montrer que : $M(x,y) - M(x',y')$ est un élément de E.

$$M(x,y) - M(x',y') = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x-x' & y-y' \\ 0 & x-x' \end{pmatrix} = M(x-x' \; ; \; y-y') \in E$$

Parce que $(x-x')$ et $(y-y')$ sont deux nombres réels. Le résultat demandé est établi.

La Question : 2) a)

Il est clair que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel d'après le cours. Etant donnés α un réel et $M(x,y)$ et $M('x',y')$ deux matrices de E.

$$\alpha \cdot M(x,y) + M(x',y') = \alpha \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & \alpha y + y' \\ 0 & \alpha x + x' \end{pmatrix}$$
$$= M(\alpha x + x' \; ; \; \alpha y + y') \in E$$

Parce que $(\alpha x + x')$ et $(\alpha y + y')$ sont trivialement deux nombres réels. Alors d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriel on conclut que E est sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

La Question : 2) b)

Soit $M(x,y)$ un élément de E. On remarque que :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= x \cdot M(1,0) + y \cdot M(0,1)$$

Autrement dit : la famille $(M(1,0) \; ; \; M(0,1))$ engendre l'espace E. Si de plus elle est libre, elle serait une base à cette espace et par suite $\dim E$ serait 2.

Pour que la famille $(M(1,0) \; ; \; M(0,1))$ soit libre il suffirait de montrer que la seule combinaison linéaire de ces deux matrices qui soit égale à la matrice nulle θ est celle (combinaison) dont tous les coefficients sont nuls.

$$\alpha \cdot M(1,0) + \beta \cdot M(0,1) = \theta$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha \cdot M(1,0) + \beta \cdot M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} Et\ bien\ \alpha = 0 \\ Et\ bien\ \beta = 0 \end{cases}$$

En conclusion, $(M(1,0) \; ; \; M(0,1))$ est une base de E et $\dim E = 2$.

La Question : 3) a)

Il suffit de montrer que : $\forall A, B \in E \;\; ; \;\; A \times B \in E$

Soient $A = M(x,y)$ et $B = M(x',y')$ deux matrices de E.

$$\begin{aligned} A \times B &= M(x,y) \times M(x',y') \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx' & xy' + x'y \\ 0 & xx' \end{pmatrix} = M(xx' \; ; \; xy' + x'y) \in E \end{aligned}$$

Parce que xx' et $(xy' + x'y)$ sont deux nombres réels. Donc La stabilité de E par rapport à × est vérifiée.

La Question : 3) b)

Pour montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien (commutatif)
- × est associative dans E .
- × est distributive par rapport à + dans E
- × est commutative dans E

La première assertion est déjà vérifiée d'après la question 1.

Pour la deuxième assertion, On se donne trois matrices dans E. On utilisera éventuellement le résultat (déjà prouvé) suivant :
$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' \; ; \; xy' + x'y)$.

D'une part on commence par :

$$\begin{aligned} & M(x,y) \times \big(M(x',y') \times M(x'',y'')\big) \\ &= M(x,y) \times M\big(x'x'' \; ; \; x'y'' + y'x''\big) \\ &= M(xx'x'' \; ; \; x(x'y'' + y'x'') + yx'x'') \\ &= M(xx'x'' \; ; \; xx'y'' + xx''y' + x'x''y) \end{aligned}$$

Et d'autre part on remarque que :

$$\begin{aligned} & \big(M(x,y) \times M(x',y')\big) \times M(x'',y'') \\ &= M(xx' \; ; \; xy' + yx') \times M(x'',y'') \\ &= M(xx'x'' \; ; \; xx'y'' + x''(xy' + yx')) \\ &= M(xx'x'' \; ; \; xx'y'' + x''xy' + x'x''y) \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'associativité de la loi × dans E

Pour la troisième assertion, on se donne trois matrices de E et on utilisera éventuellement les formules déjà prouvées suivantes :

$$\begin{cases} M(x,y) + M(x',y') = M(x + x' \; ; \; y + y') \\ M(x,y) + M(x',y') = M(xx' \; ; \; xy' + yx') \end{cases}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} & M(x,y) \times \big(M(x',y') + M(x'',y'')\big) \\ &= M(x,y) \times M(x' + x'' \; ; \; y' + y'') \\ &= M\big(x(x' + x'') \; ; \; x(y' + y'') + y(x' + x'')\big) \\ &= M(xx' + xx'' \; ; \; xy' + xy'' + x'y + x''y) \end{aligned}$$

Et d'autre part on a :

$$\begin{aligned} & M(x,y) \times M(x',y') + M(x,y) \times M(x'',y'') \\ &= M(xx' \; ; \; xy' + x'y) + M(xx'' \; ; \; xy'' + x''y) \\ &= M(xx' + xx'' \; ; \; xy' + x'y + xy'' + yx'') \end{aligned}$$

D'où l'on déduit la distributivité de × par rapport à + dans E.

Pour la 4ième assertion, On se donne deux éléments $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E :

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x',y') &= M(xx' \; ; \; xy' + x'y) \\ &= M(x'x \; ; \; yx' + y'x) \\ &= M(x',y') \times M(x,y) \end{aligned}$$

Donc × est commutative dans E.

Finalement : $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif

La Question : 4) a)

Pour montrer la stabilité de E par rapport à T, On se donne deux éléments $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E. et on utilisera éventuellement les formules :

$$\begin{cases} M(x,y) - M(x',y') = M(x - x' \; ; \; y - y') \\ M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' \; ; \; xy' + x'y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & M(x,y) \top M(x',y') \\ &= M(x,y) \times M(x',y') - M(y,0) \times M(y',0) \\ &= M(xx' \; ; \; xy' + x'y) - M(yy', 0) \\ &= M(xx' + yy' \; ; \; xy' + x'y) \in E \end{aligned}$$

$$car \;\; : \;\; \left| \begin{array}{l} (xx' + yy') \in \mathbb{R} \\ (xy' + x'y) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Donc T est une loi de composition interne dans l'ensemble E.

Avertissement : Le fait que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et T est une loi de composition interne dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Ceci n'implique jamais que T sera une loi de composition interne dans E.

La Question : 4) b)

Soit φ l'application défini par :

$$\begin{array}{llll} \varphi & : & (\mathbb{C}^*,\times) & \mapsto & (E,\top) \\ & & (x+iy) & \mapsto & M(x,y) \end{array}$$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes non nuls :

$$\varphi\big((x+iy)\times(x'+iy')\big) = \varphi\big(xx' - yy' + i(xy' + x'y)\big)$$

Signalons que les nombres réels $(xx' - yy')$ et $(xy' + x'y)$ sont non nuls et cela à partir du moment que au moins x ou y le soit. et aussi pour x' et y'.
ainsi :

$$\varphi\big((xx' - yy') + i(xy' + x'y)\big) = M(xx' - yy' \;;\; xy' + x'y)$$

$$\begin{aligned} Or,\ \ \varphi(z) \top \varphi(z') &= M(x,y) \top M(x',y') \\ &= M(x,y) \times M(x',y') - M(y,0) \times M(y',0) \\ &= M(xx' \;;\; xy' + x'y) - M(yy',0) \\ &= M(xx' - yy' \;;\; xy' + x'y) \\ &= \varphi(z \times z') \end{aligned}$$

En conclusion : φ est un homomorphisme.

La Question : 4) c)

Etant donnée $M(a,b)$ une matrice de E^*. Résolvons dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\varphi(z) = M(a,b)$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = M(a,b) &\iff \varphi(x+iy) = M(a,b) \\ &\iff M(x,y) = M(a,b) \\ &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \\ &\iff z = a + ib \end{aligned}$$

D'où l'on conclut la chose suivante :
$\forall\, M(a,b) \in E^*,\ \exists!\, z = a + ib \in \mathbb{C}^* \ :\ \varphi(z) = M(a,b)$
D'où φ est bijective de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\top)$.
l'élément $M(0,0)$ est exclu pour φ car il n'est pas inversible par la loi T.

Ainsi, les propriétés du groupe $(E^*,\top)$ seront déduites à partir de celles du groupe déjà connu $(\mathbb{C}^*,\times)$ via l'isomorphisme de groupes φ.

Comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre le nombre complexe $(1 + 0i)$ et comme tout élément $(x + iy)$ de $\mathbb{C}^*$ admet un symétrique (inverse) $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$

Alors $(E^*,\top)$ est aussi un groupe commutatif d'élément neutre la matrice $\varphi(1 + i0) = M(1,0)$.
et tout élément $M(x,y)$ de E^* admet un symétrique $M\left(\frac{x}{x^2+y^2} \;;\; \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ dans $(E^*,\top)$.

La Question : 5) a)

On se donne trois matrices de E et On utilise éventuellement les formules :

$$\left|\begin{array}{l} M(x,y) + M(x',y') = M(x + x' \;;\; y + y') \\ M(x,y) \top M(x',y') = M(xx' - yy' \;;\; xy' + x'y) \end{array}\right.$$

D'une part , On commence par calculer :

$$\begin{aligned} & M(x,y) \top \big(M(x',y') + M(x",y")\big) \\ &= M(x,y) \top M(x' + x" \;;\; y' + y") \\ &= M(x(x' + x") - y(y' + y") \;;\; x(y' + y") + y(x' + x")) \\ &= M(xx' + xx" - yy' - yy" \;;\; xy' + xy" + yx' + yx") \end{aligned}$$

Et d'autre part on poursuit le calcul par :

$$\begin{aligned} & M(x,y) \top M(x',y') + M(x,y) \top M(x",y") \\ &= M(xx' - yy' \;;\; xy' + x'y) \\ &\qquad + M(xx" - yy" \;;\; xy" + x"y) \\ &= M(xx' + xx" - yy' - yy" \;;\; xy' + xy" + yx' + yx") \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que T est distributive à gauche par rapport à +. On fera pareil pour la distributivité à droite puis on conclura.

La Question : 5) b)

Dans cette question on va utiliser la propriété caractéristique des corps. à savoir il faut vérifier les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien
- $(E^*,\top)$ est un groupe
- T est distributive par rapport à + dans E

Pour la première assertion c'est déjà fait exactement dans la question 1. La commutativité de + dans E résulte de celle de + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ parce que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour la deuxième assertion c'est déjà réalisée aussi dans la question 4)c)

Pour la distributivité de T par rapport à +, elle est récemment établie dans la question 5)a)

On vient de prouver que (E,+,T) est un corps. Et comme T est commutative dans E d'après 4)c). Alors on dira finalement que (E,+,T) est un corps commutatif.

Pause Méditation :

« The Prophet Mohamed (PBUH) was asked :
" which charity is best ? "
He replied : " That which you give while you fear poverty " »

The Prophet Mohamed PBUH

Le Deuxième Exercice

La Question : 1) a)

$$h(z)=z \iff i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)=z$$
$$\iff \left(\frac{z-2i}{z-i}\right)=\frac{z}{i}$$
$$\iff i(z-2i)=z(z-i)\ ;\ notez\ z\neq i$$
$$\iff iz+2=z^2-iz\ ;\ Développement$$
$$\iff z^2-2iz-2=0\ ;\ Réorganisation$$

La Question : 1) b)

$$(E)\ :\ z^2-2iz-2=0$$
$$\Delta=(-2i)^2-4\times1\times(-2)=4$$
$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-(-2i)-\sqrt{4}}{2\times1}=i-1=b \\ z_1=\dfrac{-(-2i)+\sqrt{4}}{2\times1}=i+1=a \end{cases}$$

La Question : 2) a)

$$\frac{h(z)-a}{h(z)-b}=\frac{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)-a}{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)-b}=\frac{\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)+ia}{\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)+ib}$$
$$=\frac{\left(\frac{z-2i+i(1+i)(z-i)}{z-i}\right)}{\left(\frac{z-2i+i(-1+i)(z-i)}{z-i}\right)}$$
$$=\frac{z-2i+(i-1)(z-i)}{z-2i-(i+1)(z-i)}$$
$$=\frac{z-2i+iz+1-z+i}{z-2i-iz-1-z+i}$$
$$=\frac{iz-i+1}{-iz-i-1}$$
$$=\frac{i\left(z+\left(\frac{1-i}{i}\right)\right)}{-i\left(z+\left(\frac{i+1}{i}\right)\right)}$$
$$=-\left(\frac{z+\left(\frac{1}{i}-\frac{i}{i}\right)}{z+\left(\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}\right)=-\left(\frac{z+(-i-1)}{z+(1-i)}\right)$$
$$=-\left(\frac{z-(i+1)}{z-(-1+i)}\right)=-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

La Question : 2) b)

$$A(a)\ ;\ B(b)\ ;\ M(z)\ ;\ M'(h(z))$$

$$\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)=-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)\equiv\arg\left(-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)\equiv\arg(-1)+\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_{M'}-z_B}\right)\equiv\pi+\arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_A-z_{M'}}{z_B-z_{M'}}\right)\equiv\pi+\arg\left(\frac{z_A-z_M}{z_B-z_M}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi]$$

La Question : 3) a)

$$A,B\ et\ M\ sont\ colinéaires \Rightarrow \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Oubien\ \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\equiv 0\ [2\pi] \\ Oubien\ \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\equiv \pi\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Oubien\ \left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv (\pi+0)\ [2\pi] \\ Oubien\ \left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv (\pi+\pi)\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Oubien\ \left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv \pi\ [2\pi] \\ Oubien\ \left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv 2\pi\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Oubien\ \left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv \pi\ [2\pi] \\ Oubien\ \left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Rightarrow A,B\ et\ M'\ sont\ colinéaires$$
$$\Rightarrow A,B,M\ et\ M'\ sont\ colinéaires$$

La Question : 3) b)

On suppose maintenant que les points A, B et M ne sont pas colinéaires.

$$\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)=-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a-h(z)}{b-h(z)}\right)\times\left(\frac{b-z}{a-z}\right)=-1\ \epsilon\ \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z_A-z_{M'}}{z_B-z_{M'}}\right)\times\left(\frac{z_B-z_M}{z_A-z_M}\right)\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } A, B, M \text{ et } M' \text{ sont colinéaires} \\ \text{ou bien } A, B, M \text{ et } M' \text{ sont cocycliques} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{ils sont cocycliques car on a supposé} \\ \text{que } A, B, \text{et } M \text{ ne sont pas colinéaires} \end{array} \right.$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

Pour le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée et non truquée, l'univers des possibilités est $\Omega' = \{P, F\}$

L'expérience en question consiste à répéter le lancer 10 fois. Le résultat (d'obtenir Pile) est représenté par une variable aléatoire de la loi de Bernoulli de paramètre p(Pile)=p(Face)=1/2

La variable aléatoire X en question associe à chaque événement la fréquence d'apparition de Pile dans une série de 10 lancers.

Ainsi les valeurs possibles de X sont $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \cdots, \frac{10}{10}$
Autrement dit $X(\Omega') = \left\{ \frac{i}{10} \;;\; 0 \le i \le 10 \right\}$

Les Questions : 1) b) et 2)

L'événement, $\left[X = \frac{1}{2}\right]$ ou plutôt $\left[X = \frac{5}{10}\right]$, donne une information sur l'obtention de (Pile) exactement 5 fois dans une épreuve de 10 lancers indépendants. Alors la probabilité de vérification de l'événement $\left[X = \frac{5}{10}\right]$ se calcule ainsi :

$$p\left[X = \frac{5}{10}\right] = C_{10}^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-5} = \frac{63}{256}$$

$$p\left[X \ge \frac{9}{10}\right] = p\left[X = \frac{9}{10} \text{ ou } X = \frac{10}{10}\right]$$

$$= p\left[X = \frac{9}{10}\right] + p\left[X = \frac{10}{10}\right]$$

$$= C_{10}^{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-9} + C_{10}^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-10}$$

$$= \frac{11}{1024}$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x}(\ln x)^2 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4\right)^2$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{4}} \cdot 4 \cdot \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$$

$$= 16 \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t = x^{\frac{1}{4}}}} (t \ln t)^2 = 16 \times 0^2 = 0 = f(0)$$

Donc la fonction f est continue à droite en 0.

La Question : 1) b)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\sqrt{x}}_{\boxed{+\infty}} \cdot \underbrace{(\ln x)^2}_{\boxed{+\infty}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(4 \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2}$$

$$= 16 \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t = x^{1/4}}} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 16 \times 0^2 = 0$$

D'où f admet une branche parabolique suivant l'axe (OX).

La Question : 2) a)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{4 \ln x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 = \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t = x^{1/4}}} 16 \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 16 \times (-\infty)^2$$

$$= +\infty \notin \mathbb{R}$$

Alors f n'est pas dérivable à droite en 0. L'axe (OY) est une asymptote verticale au voisinage de 0.

La Question : 2) b)

En utilisant les théorèmes généraux de dérivabilités, on dira que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant le produit de fonctions toutes dérivables sur $]0, +\infty[$. à savoir $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln x$.
soit $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\,(\ln x)^2\right)'$$

$$= \left(\sqrt{x}\right)' (\ln x)^2 + ((\ln x)^2)' \sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$$

$$= \frac{(4 + \ln x)(\ln x)}{2\sqrt{x}}$$

Pause Méditation :

« Acquire knowledge, it enables its possessor to distinguish right from wrong, it lights the way to heaven, it is our friend in the desert, our society in solitude, our companion when friendless, it guides us to happiness, it sustains us in misery »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : 2) c)

$$\forall x > 0 \ ; \quad f'(x) = \frac{(4+\ln x)(\ln x)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = e^{-4} \quad ou \quad x = 1$$

x	0		e^{-4}		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$4+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\left(\frac{4}{e}\right)^2$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce beau tableau, On remarque que f est continue et est strictement croissante sur $[0, e^{-4}]$.
Donc $f \ : \ [0, e^{-4}] \longmapsto f[0, e^{-4}]$ est une bijection.

$C-à-d \quad que \quad f \ : \ [0, e^{-4}] \longmapsto \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$

C-à-d $\forall y \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right] \ ; \ \exists! \, x \in [0, e^{-4}] \ : \ f(x) = y$

$$Autrement\ dit \ : \ \forall x \in [0, e^{-4}] \ : \ f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right] \quad (*)$$

$$de\ même\ pour\ la\ bijection\ f \ : \ [e^{-4}, 1] \longmapsto \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$$

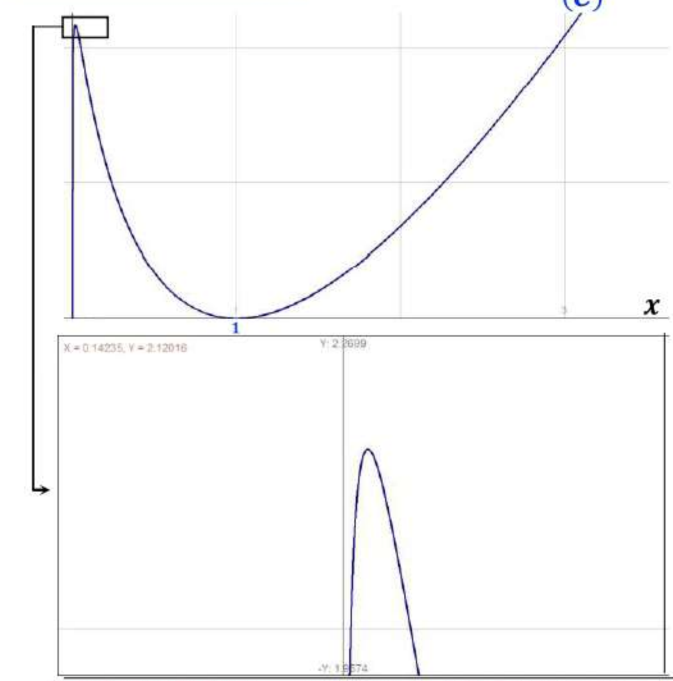
$$Autrement\ dit \ : \ \forall x \in [e^{-4}, 1] \ : \ f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right] \quad (**)$$

Finalement, en combinant les résultats $(*)$ *et* $(**)$

On conclut que : $\forall x \in [0,1] \ ; \ f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$

Ou encore : $\forall x \in [0,1] \ ; \ \boxed{0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2}$

La Question : 2) d)



La Question : 3) a)

On sait déjà que f est continue sur $[0, +\infty[$ et puisque $1 \in [0, +\infty[$ Alors elle admet une seule primitive φ sur $[0, +\infty[$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, +\infty[\ : \ \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt \ ; \ \varphi(0) = 0 \\ \forall x \in [0, +\infty[\ : \ \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$Ainsi \ : \quad F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt = -\varphi(x)$$

Comme φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ Alors F l'est aussi et On a : $F'(x) = -\varphi'(x) = -f(x) = -\sqrt{x}\,(\ln x)^2$

La Question : 3) b)

On a : $\forall x \in [0, +\infty[\ : \ F'(x) = -\sqrt{x}\,(\ln x)^2 < 0$.
Donc F est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

La Question : 4) a)

$$\int_x^1 \sqrt{t} \cdot \ln t\,dt = \int_x^1 \underbrace{t^{1/2}}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{v(t)}\,dt$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\right) t^{\left(\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \left(\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \ln t\right]_x^1 - \frac{2}{3} \int_x^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \ln t\right]_x^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_x^1$$

$$= \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{-2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} x\sqrt{x}$$

La Question : 4) b)

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 \sqrt{t}\,(\ln t)^2\,dt$$

$$= \int_x^1 \underbrace{\sqrt{t}}_{\boldsymbol{u'(t)}} \ \underbrace{(\ln t)^2}_{\boldsymbol{v(t)}}\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} (\ln t)^2\right]_x^1 - \int_x^1 \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2 \ln t}{t}\right) dt$$

$$= \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 - \frac{4}{3} \int_x^1 \left(t^{\frac{1}{2}} \cdot \ln t\right) dt$$

$$= \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{-2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} x\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{-2}{3} x\sqrt{x} (\ln x)^2 + \frac{8}{9} x\sqrt{x} \ln x + \frac{16}{27} - \frac{16}{27} x\sqrt{x}$$

$Remarque\ :\ x^{1/2} = \sqrt{x} \quad et \quad x^{3/2} = x\sqrt{x}$

La Question : 4) c)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(t)|\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt \ ;\ car\ f(x) \geq 0\ ;\ \forall x \geq 0$$

$$= F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2}{3} x\sqrt{x} (\ln x)^2 + \frac{8}{9} x\sqrt{x} \ln x + \frac{16}{27} - \frac{16}{27} x\sqrt{x}$$

$$= \frac{16}{27}$$

La Question : 5) a)

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\, dt = F\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad F(0) \geq F\left(\frac{1}{n}\right) \geq F(1) \ ;\ car \left| \begin{array}{l} F\ est\ \searrow\ sur\ [0, +\infty[\\ et\ \ 0\ ;\ \frac{1}{n}\ ;\ 1\ \epsilon\ [0, +\infty[\end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16}{27} \geq u_n \geq 0 \ ;\ car\ F(0) = \frac{16}{27} \quad et \quad F(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n \geq 1}\ \ est\ born\acute{e}e$$

$$n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad n + 1 > n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ ;\ passage\ \grave{a}\ l'inverse$$

$$\Rightarrow \quad F\left(\frac{1}{n+1}\right) > F\left(\frac{1}{n}\right) \ ;\ car\ F\ est\ \searrow sur\ [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} > u_n \ ;\ \forall\, n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad (u_n)_{n \geq 1}\ \ est\ une\ suite\ croissante$$

La Question : 5) b)

On a déjà montré que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante et est majorée par $\frac{16}{27}$; $car\ \frac{16}{27} \geq u_n \geq 0$
Donc elle est convergente vers une limite réelle.

$$\lim_{n\infty} (u_n) = \lim_{n\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = F\left(\lim_{n\infty} \frac{1}{n}\right) = F(0) = \frac{16}{27}$$